

2.50

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TW

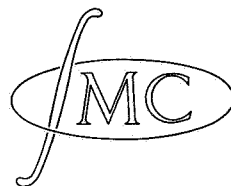
College Toegepaste Wiskunde

Speciale onderwerpen

DISTRIBUTIES

door

Prof.dr. H.A. Lauwerier



1960/1961

BIJLAGE
BIBLIOTHEEK
MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

§ 1. Inleiding

In vele problemen van de mathematische fysica is het onderzoek gericht op de in het veld optredende singulariteiten, discontinuïteiten etc. Tot voor kort ondervonden de natuurkundigen nogal eens moeilijkheden om tot een passende mathematische beschrijving te komen. Bijvoorbeeld bleek het klassieke begrip van een functie welke in elk punt van de beschouwde ruimte een bepaalde waarde aanneemt ontoereikend te zijn. Men kan bijv. niet op rechtstreekse wijze een mechanische of elektrische stoot, een materiële of thermische puntbron voorstellen.

Een eerste poging om tot uitbreiding van het klassieke functiebegrip te komen werd in 1899 door de electrotechnicus Heaviside ondernomen, een geniale fantast en vooral bekend als de schepper van de operatorenrekening, een gegoochel dat later door de Laplace transformatie en vooral door het werk van Mikusinski *) mathematisch gerechtsvaardigd werd. Heaviside voerde in de eerste plaats de ook wel naar hem genaamde discontinue eenheidsfunctie $\theta(t)$ in gedefinieerd als

$$(1.1) \quad \begin{cases} \theta(t) = 0 & \text{voor } t < 0, \\ \theta(t) = 1 & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

Voor $t=0$ is deze functie niet gedefinieerd, hetgeen meestal geen bezwaar is. Waar nodig vullen we (1.1) aan met de afspraak

$$(1.2) \quad \theta(0) = \frac{1}{2}.$$

Heaviside gebruikte deze eenheidsfunctie bij elektrische inschakelverschijnselen. Naast $\theta(t)$ beschouwde hij de stootfunctie $\delta(t)$ welke hij "definieerde" als de afgeleide van $\theta(t)$

$$(1.3) \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} \theta(t).$$

Wiskundig is dit onzin, immers (1.3) betekent dat

$$(1.4) \quad \delta(t) = 0 \quad \text{voor } t \neq 0.$$

Voor $t=0$ bestaat $\delta(t)$ niet. Heaviside leidt echter uit (1.3) af dat

$$(1.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

*) J. Mikusinski, Operatorenrechnung. Berlin. 1957.

Wiskundig is dit resultaat niet te rijmen met (1.4). Onverschillig welk integraalbegrip, Riemann of Lebesgue, toegepast wordt het linkerlid van (1.5) is altijd 0.

Dat een en ander toch werkt zien we aan de hand van het volgende voorbeeld, waarbij we een elektrische of mechanische oscillator beschouwen welke op het tijdstip $t=0$ door een stoot in beweging wordt gebracht. Met passende keuze van eenheden is de differentiaalvergelijking

$$(1.6) \quad \ddot{x} + x = \delta(t),$$

waarbij het rechterlid (uitwendige kracht) de op $t=0$ optredende stoot voorstelt. De oplossing is blijkbaar

$$(1.7) \quad \begin{cases} x = 0 & \text{voor } t < 0 \\ x = \sin t & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

of m.b.v. (1.1) in eenvoudiger notatie

$$(1.8) \quad x = \sin t \, \theta(t).$$

Voor de impuls is dan

$$(1.9) \quad \dot{x} = \cos t \, \theta(t).$$

De stoot $\delta(t)$ leidt derhalve tot een momentane impulsverandering van 1.

De beschouwingen van Heaviside, die overigens in voor wiskundigen weinig klare taal werden gegeven, bleven lang op zichzelf staan tot in 1930 Dirac in zijn boek "The principles of quantum mechanics" een systematische toepassing van de later naar hem genoemde delta-functie gaf. De delta-functie wordt door hem opgevat als een "symbolische functie" welke gekarakteriseerd is door de eigenschap

$$(1.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

voor elke continue functie $\varphi(x)$.

Mathematisch gezien, althans van het standpunt van de klassieke analyse, is (1.10) evenmin een definitie als (1.3). Maar de door Dirac gegeven rekenregels werkten en vele resultaten welke met de klassieke analyse afgeleid konden worden, konden met behulp van de "symbolische functies" van Dirac korter en overzichtelijker verkregen worden. Terrecht weigerden de natuurkundigen het gebruik van de symbolische functies van Dirac op te geven, omdat een wiskundige rechtvaardiging ontbrak. Zeer terecht, want sinds kort is deze rechtvaardiging gekomen. In 1945 publiceerde de Franse wiskundige Laurent Schwartz een

theorie over gegeneraliseerde functies welke hij "distributies" noemde. De delta-functie van Dirac en verwante functies zijn hiervan speciale gevallen. Later in 1950 en 1951 werkte Schwartz zijn theorie in boekvorm zeer gedetailleerd uit. Er was nu een gemeenschappelijke basis geschapen voor een verantwoorde discussie van op het eerste gezicht uiteenlopende zaken als Dirac's delta-functie $\delta(x)$, de Cauchy-hoofdwaarde van singuliere integralen als

$$(1.11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$$

en een sommatiemethode van divergente Fourier-reeksen als

$$(1.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

De grondgedachte van Schwartz bestaat hierin, dat we het fysische begrip van een massaverdeling $f(x)$ op een rechte op twee wijzen kunnen beschrijven. In de eerste plaats kunnen we in het algemeen $f(x)$ beschouwen als een klassieke functie die voor elke waarde van x een getal oplevert, dat de plaatselijke massadichtheid voorstelt. De tweede wijze van beschrijving sluit meer aan bij het fysische experiment. Fysisch kunnen we alleen iets in een zeker (klein) interval meten maar nooit iets in alleen een punt. Om de massa te vinden in de buurt van het punt x_0 doen we een experiment met een meetinstrument, waarvan de karakteristiek $\varphi(x)$ is, d.w.z. $\varphi(x)$ heeft alleen betekenis in een klein interval om x_0 , zeg $x_0 - h < x < x_0 + h$, en is nul er buiten. We meten dus de massa

$$(1.13) \quad \int f(x) \varphi(x) dx$$

waarbij het integratie-interval afhangt van het bereik van ons meetinstrument. We kunnen dus de massaverdeling ook beschrijven als het collectief van meetresultaten (1.13) verkregen door een zekere verzameling meetapparaten. Dat de tweede beschrijving algemener is dan de eerste blijkt doordat een in de oorsprong geconcentreerde punt-massa niet als functie opgevat kan worden maar wel als verzameling van meetresultaten.

Dienovereenkomstig definieert Schwartz gegeneraliseerde functies als componenten-verzamelingen t.o.v. een gegeven functieklassie. Een distributie of gegeneraliseerde functie $f(x)$ is derhalve een lineaire functionaal welke aan zgn. testfuncties $\varphi(x)$ scalarwaarden (f, φ) toevoegt. In de volgende paragraaf zullen we dit nader preciseren. We zien in dat gewone functies $f(x)$ als distributies opgevat kunnen

worden. Het is voldoende voor (f, φ) de integraal (1.13) te nemen. Voor Dirac's delta-functie geldt in overeenstemming met (1.10) de definitie

$$(f, \varphi) = \varphi(0).$$

Het mooie van Schwartz' theorie is dat de gewone bewerkingen van de analyse ook voor distributies gelden en dat bovendien vele stellingen een veel eenvoudiger vorm krijgen doordat uitzonderingsgevallen vaak komen te vervallen. Als voorbeeld kan men elke distributie differentieren. Men kan distributies in zekere zin ook zien als limieten van gewone functies. Men kan Dirac's delta-functie $\delta(x)$ bijv. opvatten als de limiet van

$$(1.13) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} \quad n \rightarrow \infty,$$

of

$$(1.14) \quad f(x, a) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} \quad a \rightarrow 0,$$

of

$$(1.15) \quad f_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2} \quad n \rightarrow \infty.$$

Dit leidt eventueel tot een andere aequivalente definitie van ge-generaliseerde functies te vergelijken met de invoering van onmeetbare getallen als fundamenteaalrijen.

De publicaties van Schwartz zijn betrekkelijk moeilijk leesbaar en vereisen een behoorlijke kennis van de abstracte analyse en de topologie. Na Schwartz hebben een aantal wiskundigen getracht een eenvoudiger presentatie van Schwartz' denkbeelden te geven waardoor zijn theorie beter toegankelijk voor bijv. natuurkundigen werd. Afgezien van een aantal tijdschriftartikelen en moeilijk toegankelijke publicaties noemen we in de eerste plaats Lighthill die in 1958 een boekje "Introduction to Fourier analysis and generalised functions" schreef, dat gemakkelijk leesbaar, maar helaas wat beperkt van opzet is. Lighthill kiest de "fundamenteaalrij-definitie" als uitgangspunt van zijn beschouwingen. Vervolgens noemen we een serie-werk over ge-generaliseerde functies, waarvan het eerste deel van Gelfand en Shilov een goede en prettig leesbare inleiding tot de theorie van de distributies vormt. Bovendien treft men hier veel meer toepassingen aan dan in het boekje van Lighthill. De genoemde schrijvers plaatsen weer "functionaal-definitie" op de voorgrond.

In onze beschouwingen zullen we de "functionaal-definitie" eveneens primair stellen en wel op grond van het feit, dat we hierdoor een beter inzicht in de samenhang van de verschillende eigenschappen verkrijgen en dat deze definitie zich gemakkelijker tot toepassingen leent.

§ 2. Grondbegrippen

Onder een testfunctie verstaan we een functie $\varphi(x)$ welke de volgende kenmerken bezit.

1° buiten een zeker interval is $\varphi(x)=0$. (Dergelijke functies noemt men wel finiet.)

2° alle afgeleiden van $\varphi(x)$ bestaan.

De ruimte van de testfuncties noemen we T . Als voorbeeld treft men in T de volgende functie aan

$$(2.1) \quad \varphi(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a^2-x^2}) & \text{voor } -a < x < a, \\ 0 & \text{voor } |x| \geq a. \end{cases}$$

Een rij van testfuncties $\varphi_n(x)$ heet convergent tot nul in T wanneer het volgende geldt

1° $\varphi_n(x) = 0$ voor $|x| > a$, waarbij a niet van n afhangt.

2° $\varphi_n(x)$ en elke afgeleide convergeren uniform (met betrekking tot x) tot nul.

Als voorbeeld convergeert de rij $\exp(-\frac{n}{n^2-x^2})\theta(a^2-x^2)$ voor $n \rightarrow \infty$ tot nul. De rij $\exp(-\frac{n}{n^2-x^2})\theta(n^2-x^2)$ voldoet echter niet aan de definitie omdat $\frac{n}{n^2-x^2}$ de eerste voorwaarde niet vervuld is.

Onder een continue lineaire functionaal f met betrekking tot T verstaan we een verzameling componenten (f, φ) met de volgende eigenschappen

1° (f, φ) bestaat voor alle $\varphi \in T$ en is lineair t.o.v. φ .

2° Is de rij φ_n in T tot nul convergent dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = 0$.

Als voorbeeld nemen we een functie $f(x)$ welke in elk eindig interval absoluut integreerbaar is. Definiëren we

$$(2.2) \quad (f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

dan is hierdoor een continue lineaire functionaal bepaald. Dat 1° geldt is evident, dat 2° geldt volgt gemakkelijk uit de uniforme convergentie van de rij φ_n in zeker eindig interval $(-a, a)$.

Als tweede voorbeeld kiezen we de functionaal bepaald door

$$(2.3) \quad (f, \varphi) = \varphi(0).$$

De twee kenmerken zijn hier inderdaad op triviale wijze vervuld. De door (2.3) bepaalde functionaal kan niet op de wijze van (2.2) uit een lokaal integreerbare functie afgeleid worden. Men kan dit bijv. aantonen op de volgende wijze. Veronderstel dat (2.2) geldt met de definitie (2.3). Kiezen we voor $\varphi(x)$ de speciale testfunctie (2.1) dan is dus

$$\int_{-a}^a f(x) \exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right) dx = e^{-1}.$$

Voor $a \rightarrow 0$ convergeert het linkerlid tot nul waarmee een tegenstrijdigheid is ontstaan.

Vatten we continue lineaire functionalen op als gegeneraliseerde functies of distributies dan is dus hierboven aangetoond, dat hierdoor een essentiële uitbreiding van het klassieke functiebegrip mogelijk is gemaakt. Distributies van het type (2.2) noemen we regulier, die welke niet uit een lokaal integreerbare functie afgeleid kunnen worden noemen we singulier. We noteren distributies op dezelfde wijze als functies. De door (2.3) bepaalde distributie noteren we als $\mathcal{J}(x)$. Uitbreiding van de betrekking (2.2) tot singuliere distributies geeft dus

$$(2.4) \quad \varphi(0) = \int \mathcal{J}(x) \varphi(x) dx,$$

zodat we $\mathcal{J}(x)$ herkennen als de in de inleiding besproken delta-functie van Dirac. Men lette er wel op, dat het rechterlid van (2.4) alleen symbolische betekenis heeft en dus bijv. niets met de gewone betekenis van een integraal als limiet van een som te maken heeft. M.a.w. het rechterlid van (2.4) is gedefinieerd door het linkerlid. De normale schrijfwijze zou zijn $(\mathcal{J}(x), \varphi(x))$. Het zal evenwel later blijken dat de gevolgde schrijfwijze veel gemak heeft doordat de symbolische integraal zich in vele opzichten gedraagt als een gewone integraal. Als voorbeeld kan men dergelijke symbolische integralen partiëel integreren.

We formuleren vervolgens een aantal elementaire rekenregels voor distributies. Deze moeten uiteraard consistent zijn met de corresponderende regels voor gewone functies. De verificatie hiervan zij aan de lezer overgelaten.

Twee distributies $f(x)$ en $g(x)$ heten gelijk indien

$$(2.5) \quad (f, \varphi) = (g, \varphi) \quad \text{voor alle } \varphi \in T.$$

Onder de lineaire combinatie $af + bg$ van twee distributies $f(x)$ en $g(x)$ verstaat men de distributie bepaald door

$$(2.6) \quad (af+bg, \varphi) = a(f, \varphi) + b(g, \varphi).$$

Als speciale gevallen hiervan heeft men de som $f+g$ en de vermenigvuldiging af met een constante a .

Men kan i.h.a. geen distributies met elkaar vermenigvuldigen. Wel kan men het product vormen van een distributie $f(x)$ en een oneindig vaak differentieerbare functie $c(x)$. Men definieert nml. cf als

$$(2.7) \quad (cf, \varphi) = (f, c\varphi).$$

Inderdaad is met $\varphi(x)$ ook $c(x)\varphi(x)$ een testfunctie.

Voorbeeld

$$(2.8) \quad x \cdot \mathcal{J}(x) = 0.$$

Stelt men zich een distributie fysisch voor als een op de x -as gelegen massaverdeling, dan kan men hierop een translatie, een spiegeling en een gelijkvormigheidstransformatie toepassen. De mathematische formulering van deze operaties is als volgt.

Onder de translatie van een distributie $f(x)$ over een afstand h (voor $h > 0$ naar rechts) verstaat men de distributie $f(x-h)$ bepaald door

$$(2.9) \quad (f(x-h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+h)).$$

Onder de spiegeling van een distributie $f(x)$ t.o.v. $x=0$ verstaat men de distributie $f(-x)$ bepaald door

$$(2.10) \quad (f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)).$$

Onder de gelijkvormige distributie $f(cx)$ van $f(x)$ verstaat men die bepaald door

$$(2.11) \quad (f(cx), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x/c))/c.$$

De volgende definities spreken voor zich zelf

De distributie $f(x)$ heet even als $f(-x) = f(x)$;

De distributie $f(x)$ heet oneven als $f(-x) = -f(x)$;

De distributie $f(x)$ heet periodiek als $f(x-h) = f(x)$.

Tenslotte heet $f(x)$ homogeen van de orde m als

$$(2.12) \quad f(cx) = c^m f(x).$$

Voorbeelden

1. $\mathcal{J}(x)$ is even en homogeen van de orde -1 .
2. Uit $\mathcal{J}(x)$ kunnen we door translatie $\mathcal{J}(x-x_0)$ afleiden met de eigenschap

$$(2.13) \quad \int (x-x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

We kunnen niet zonder meer spreken over de waarde van een distributie $f(x)$ in een punt x . Maar op de volgende wijze kunnen we tot het begrip van de waarde van een distributie in een open interval (algemener een open verzameling) komen. We beginnen met de definitie van de drager van een testfunctie $\varphi(x)$. Hieronder verstaan we de afgesloten verzameling van de punten x waarvoor $\varphi(x) \neq 0$. De distributie $f(x)$ heeft dan per definitie de waarde nul in het open interval Ω als $(f, \varphi) = 0$ voor alle testfuncties waarvan de drager in Ω ligt. Als voorbeeld dient weer $\delta(x)$ welke nul is in de open verzameling $x \neq 0$. Men kan nu ook twee distributies t.o.v. een open interval Ω met elkaar vergelijken. We kunnen zeggen, dat f en g in Ω gelijk zijn als $f-g$ in Ω nul is. Is g een reguliere distributie dan kan men dus aan f in Ω langs deze omweg puntwaarden toekennen. Het complement van de open verzameling waar een distributie f nul is heet de drager van f . Dit is dus een gesloten verzameling. Als voorbeeld heeft $\delta(x)$ de drager $x=0$.

§ 3. Differentiatie en limietprocessen

A. Men kan gemakkelijk laten zien dat elke distributie gedifferentieerd kan worden. Onder de afgeleide $f'(x)$ van de distributie $f(x)$ verstaan we namelijk de continue lineaire functionaal bepaald door

$$(3.1) \quad (f'(x), \varphi(x)) = - (f(x), \varphi'(x)).$$

Is $f(x)$ een reguliere distributie waarbij $f(x)$ als functie absoluut continu is, d.w.z. de integraal van zijn afgeleide, dan stemt blijkbaar de afgeleide distributie $f'(x)$ met de gelijknamige afgeleide van de functie overeen. De definitie (3.1) is dus consistent. Het valt niet moeilijk te bewijzen, dat de gewone rekenregels van het differentieren van functies op distributies overgedragen kunnen worden.

Voorbeelden

1. (3.2) $\theta'(x) = \delta(x).$

Het bewijs is volgens (3.1)

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

2. De functie $\operatorname{sgn} x$ (signum x) is gedefinieerd als

$$(3.3) \quad \begin{cases} \operatorname{sgn} x = -1 & \text{voor } x < 0, \\ \operatorname{sgn} x = 1 & \text{voor } x > 0. \end{cases}$$

Men heeft

$$(3.4) \quad \operatorname{sgn} x = 2\theta(x) - 1,$$

en in distributionele zin

$$(3.5) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sgn} x = 2 \delta(x).$$

$$3. (3.6) \quad \frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn} x.$$

4. Is $f(x)$ absoluut continu en differentieerbaar met uitzondering van $x=a_1, a_2, \dots, a_n$ waar $f(x)$ gewone sprongen maakt van α_j bij a_j ($j=1, 2, \dots, n$) dan is de distributionele afgeleide van $f(x)$ gelijk aan

$$(3.7) \quad f'(x) + \alpha_1 \delta(x-a_1) + \alpha_2 \delta(x-a_2) + \dots + \alpha_n \delta(x-a_n).$$

B. Men zegt, dat de rij distributies $f_n(x)$ tot de distributie $f(x)$ convergeert,

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

indien voor alle testfuncties $\varphi \in T$ geldt dat

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Het kan zijn, dat de $f_n(x)$ en/of $f(x)$ ook betekenis hebben als gewone functies. In dat geval zal de limietvorming (3.8) "meestal" wel consistent zijn met die van de gewone definitie voor functie. Alvorens een daartoe strekkende stelling te formuleren geven we eerst een paar illustratieve voorbeelden.

Beschouw eerst de rij functies $f_n(x)$ van (1.13). De gewone limiet bestaat voor geen enkele x . In distributionele zin is echter

$$(3.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x).$$

Het bewijs is volgens (3.9)

$$(f_n, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0).$$

Beschouw vervolgens de functierij $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$. De gewone limiet is $f(x)=0$ mits $x \neq 0$. Voor $x=0$ is er geen limiet. In distributionele zin is, zoals gemakkelijk nagegaan kan worden,

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} = \delta(x).$$

Voor $x \neq 0$ kan men dus overeenstemming constateren.

Beschouw als laatste voorbeeld $f_n(x) = -\frac{2n x}{\pi(1+n^2x^2)^2}$, welke functierij uit de vorige door differentiatie verkregen is. Voor alle waarden van x , nu inclusief $x=0$, is de gewone limiet $f(x)=0$ maar voor de distributionele limiet kan men afleiden dat $f(x) = \delta'(x)$. Bij dit voorbeeld is er geen overeenstemming tussen de twee limieten.

De aangekondigde algemene stelling luidt nu

Stelling 3.1. Convergeert de rij lokaal integreerbare functies $f_n(x)$ bijna overal tot een limiet $f(x)$ en is $|f_n(x)|$ uniform begrensd door een lokaal integreerbare functie $g(x)$, d.w.z.

$$(3.12) \quad |f_n(x)| < g(x) \quad \text{voor alle } x \text{ en } n,$$

dan geldt

$$(3.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Deze stelling is niets anders dan een andere formulering van een hoofdstelling uit de theorie der Lebesgue-integratie.

Als volgende belangrijke stelling hebben we

Stelling 3.2. Convergeert de rij distributies $f_n(x)$ tot de distributie $f(x)$ dan convergeert de rij $f'_n(x)$ tot $f'(x)$.

In formule-vorm

$$(3.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Het bewijs is eenvoudig. We moeten aantonen, dat $\lim(f'_n - f', \varphi) = 0$. Dit volgt via (3.1) onmiddellijk uit de convergentie van f_n tot f .

Bij de twee voorgaande stellingen kunnen we de discrete variabele n natuurlijk door een continue parameter vervangen. Als voorbeeld nemen we de volgende variant van (3.11)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)} = \delta(x).$$

Toepassing van de laatste stelling geeft

$$(3.15) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-2\lambda x}{\pi(x^2 + \lambda^2)^2} = \delta'(x).$$

Uit de convergentie van een rij kunnen we op de bekende wijze die van een reeks afleiden. Per definitie is

$$(3.16) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n(x).$$

Voorbeeld

$$(3.17) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n\pi).$$

Het bewijs volgt uit

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nx = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

waarbij (3.10) op elk der intervallen $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$ wordt toegepast, en toepassing van (3.10). Volgens stelling 3.2 mogen we de bovenstaande reeks term voor term differentieren zodat

$$(3.18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx = -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2n\pi).$$

§ 4. Regularisering

We hebben gezien, dat lokaal integreerbare functies zonder meer als distributies opgevat kunnen worden. Functies welke met uitzondering van een aantal punten lokaal integreerbaar zijn, kunnen tot distributies worden uitgebreid indien de uitzonderingspunten algebraïsche singulariteiten zijn, zodanig dus dat in x_0 de functie niet sterker divergeert dan $(x-x_0)^{-n}$ voor zekere n . Het is voldoende voor ons om functies te beschouwen welke alleen in de oorsprong $x=0$ singulier zijn. Als voorbeeld nemen we de functie x^{-1} . De regel

$$(4.1) \quad (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

werkt niet omdat de integraal divergeert. Definieren we de functionaal (f, φ) echter als

$$(4.2) \quad (f, \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx,$$

dan is er niets meer aan de hand. We merken op, dat we het rechterlid van (4.2) kunnen schrijven als

$$(4.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\},$$

hetgeen de gebruikelijke vorm is voor de z.g. hoofdwaaarde van Cauchy. We zien tevens dat de gevormde distributie $f(x)$ buiten $x=0$, d.w.z. buiten een willekeurige omgeving van $x=0$ met de functie $1/x$ overeenstemt. Het vormen van een distributie op een dergelijke wijze heet regulariseren. Men zegt dan dat door (4.2) de integraal (4.1) geregulariseerd is.

Aangezien elke distributie gedifferentieerd kan worden, kunnen we uit de distributie x^{-1} door differentiatie de distributie x^{-n} ($n=2,3,\dots$) afleiden. Buiten $x=0$ stemmen distributie en afgeleide in gewone zin weer met elkaar overeen. Voor $n=2$ is b.v.

$$\begin{aligned} (x^{-2}, \varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} (x^{-1}, \varphi') = \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(-x)}{x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} d \{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0) \}, \end{aligned}$$

zodat

$$(4.4) \quad (x^{-2}, \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx.$$

We beschouwen vervolgens de functie x_+^{λ} welke voor $x > 0$ overeenstemt met x^{λ} en voor $x \leq 0$ gelijk aan nul is. Voor $\lambda > -1$ geeft

$$(4.5) \quad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx$$

de gebruikelijke reguliere functionaal. Differentiatie leidt tot een betekenis van x_+^λ als distributie voor lagere waarden van λ . M.a.w.

$$(4.6) \quad \frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots$$

Rechtstreeks kunnen we met behulp van analytische voortzetting in het complexe λ -vlak de functionaal (4.5) op de volgende wijze naar links voortzetten. Voor $\text{Re } \lambda > -1$ geldt de identiteit

$$(4.7) \quad \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right\} dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \sum_{j=1}^n \frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!(\lambda+j)}.$$

Beide leden van (4.7) zijn analytische functies van λ . Aangezien het rechterlid ook geldig is voor $\text{Re } \lambda > -n$ bepaalt dit de analytische voortzetting van het linkerlid. Volgens (4.7) is (x_+^λ, φ) analytisch met enkelvoudige polen in $\lambda = -1, -2, -3, \dots$. Het residu in $\lambda = -k$ is $\varphi^{(k-1)}(0)/(k-1)!$. Dit betekent dus dat de distributie x_+^λ voor $\lambda = -k$ het residu $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(x)$ bezit.

De functie x_-^λ gedefinieerd als

$$(4.8) \quad x_-^\lambda = \begin{cases} 0 & x \geq 0, \\ |x|^\lambda & x < 0, \end{cases}$$

kan op analoge wijze behandeld worden. Ook kunnen we gebruik maken van

$$(4.9) \quad (x_-^\lambda, \varphi(x)) = (x_+^\lambda, \varphi(-x)).$$

In het bijzonder geldt het equivalent van (4.6) en heeft x_-^λ in de pool $\lambda = -k$ het residu $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$.

Uit x_+^λ en x_-^λ kunnen we twee nieuwe distributies afleiden nml.

$$(4.10) \quad |x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda$$

en

$$(4.11) \quad |x|^\lambda \text{sgn } x = x_+^\lambda - x_-^\lambda.$$

Uit het voorafgaande leiden we zonder moeite de volgende resultaten af:

$|x|^\lambda$ heeft polen voor $\lambda = -1, -3, -5, \dots$.

Het residu bij $\lambda = -2m-1$ is $\frac{2}{(2m)!} \delta^{(2m)}(x)$.

$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ heeft polen voor $\lambda = -2, -4, \dots$.

Het residu bij $\lambda = -2m$ is $-\frac{2}{(2m-1)!} \delta^{(2m-1)}(x)$.

Door toevoeging van geschikte factoren kan men uit x_+^λ , x_-^λ , $|x|^\lambda$ en $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ distributies vormen welke vrij van polen zijn en dus gehele functionalen in λ vormen.

Als voorbeeld nemen we x_+^λ . We moeten hier een zodanige factor aan toevoegen, dat de polen bij $\lambda = -1, -2, \dots$ geneutraliseerd worden. Om een geschikte factor te vinden maken we gebruik van een trucje. We kiezen een of andere testfunctie $\varphi(x)$. Dan komt

$$\int \varphi(x) x_+^\lambda dx,$$

d.i. een analytische functie met polen bij $\lambda = -1, -2, \dots$ in aanmerking als een geschikte factor. We kiezen $\varphi(x) = e^{-x}$, hoewel dit strikt genomen geen testfunctie is, maar wel willekeurig dicht door testfuncties benaderd kan worden. Als gewenste factor ontstaat aldus

$$(4.12) \quad \int_0^\infty e^{-x} x_+^\lambda dx = \lambda!.$$

Aldus kunnen we uit x_+^λ de gehele analytische functionaal

$$(4.13) \quad \frac{x_+^\lambda}{\lambda!}$$

afleiden.

De waarde van deze distributie bij de vroegere polen $\lambda = -1, -2, \dots$ berekenen we a.v.

$$\left. \frac{x_+^\lambda}{\lambda!} \right|_{\lambda=-n} = \frac{\operatorname{Res} x_+^\lambda}{\operatorname{Res}(x_+^\lambda, e^{-x})} \Big|_{\lambda=-n} = \frac{(-1)^{n-1} \delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \Big/ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \delta^{(n-1)}(x),$$

dus

$$(4.14) \quad \left. \frac{x_+^\lambda}{\lambda!} \right|_{\lambda=-n} = \delta^{(n-1)}(x).$$

Op analoge wijze leiden we uit x_-^λ de gehele analytische functionaal af

$$(4.15) \quad \frac{x_-^\lambda}{\lambda!}$$

waarbij voor $\lambda = -n$

$$(4.16) \quad \left. \frac{x_-^\lambda}{\lambda!} \right|_{\lambda=-n} = (-1)^{n-1} \delta^{(n-1)}(x).$$

Bij $|x|^\lambda$ kiezen we als hulpfunctie $\varphi(x) = e^{-x^2}$ waarmee

$$(4.17) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |x|^\lambda dx = \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right)$$

een geschikte neutraliserende factor levert. Als boven is

$$(4.18) \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right)}$$

een gehele analytische functionaal met

$$(4.19) \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right)} \Big|_{\lambda = -2m-1} = \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} \mathcal{J}^{(2m)}(x).$$

Tenslotte is analoog

$$(4.20) \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)}$$

geheel met

$$(4.21) \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)} \Big|_{\lambda = -2m} = \frac{(-1)^m (m-1)!}{(2m-1)!} \mathcal{J}^{(2m-1)}(x).$$

Opgaven

1. Bewijs $x \mathcal{J}'(x) = -\mathcal{J}(x),$
 $x^2 \mathcal{J}''(x) = 2 \mathcal{J}(x).$
2. Bewijs $x^m \mathcal{J}^{(n)}(x) = 0$ voor $m \geq n+1,$
 $x^n \mathcal{J}^{(n)}(x) = (-1)^n n! \mathcal{J}(x).$
3. Bewijs $\mathcal{J}(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \mathcal{J}^{(n)}(x).$

(Aanwijzing: ga uit van de Taylor ontwikkeling van $\varphi(x-h)$).

$$4. \text{ Bewijs } \frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x},$$

waarbij x^{-1} de door (4.2) bepaalde distributie is.

5. De definitie van een complexe distributie wordt als bij functies afgeleid uit die van het reële en imaginaire deel. We definiëren aldus de gegeneraliseerde functie

$$\ln(x+i0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow +0} \ln(x+iy).$$

Bewijs nu dat

$$\ln(x+i0) = \ln|x| + i\pi \theta(-x),$$

en

$$\frac{d}{dx} \ln(x+i0) = \frac{1}{x} - i\pi \mathcal{J}(x).$$

Bewijs dat ook in de zin van distributionele limiet

$$\ln(x+i0) = \lim_{y \rightarrow +0} \ln(x+iy).$$

Bewijs dat hieruit volgt

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)$$

eveneens in de zin van distributionele limiet. Wat betekent de laatste betrekking voor een willekeurige testfunctie?

6. Bewijs de volgende stelling over een rij reguliere distributies $f_n(x)$ welke tot $\delta(x)$ convergeren.

a. Voor elke vaste positieve ω is

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right|,$$

waarbij $-M < a < b < M$, uniform begrensd door een slechts van M afhankende constante.

b. Voor vaste a en b is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \notin (a,b), \\ 1 & \text{als } 0 \in (a,b). \end{cases}$$

Met de voorwaarden a en b geldt de distributionele limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x).$$

(Aanwijzing: bewijs eerst dat b.v. $\int_{-1}^x f_n(\xi) d\xi \rightarrow \theta(x)$).

7. Pas de stelling van opgave 6 toe op

$$\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \delta(x) \quad \text{voor } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp -\frac{x^2}{4t} \rightarrow \delta(x) \quad \text{voor } t \rightarrow +0,$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} \rightarrow \delta(x) \quad \text{voor } n \rightarrow \infty.$$

8. Bewijs $\frac{d}{dx} \frac{1}{2} |x^2 - 1| = x \{ 1 + 2\theta(x-1) - 2\theta(x+1) \}$.

Leidt een uitdrukking af voor $\frac{d}{dx} |f(x)|$ als $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$.

9. Laat door substitutie zien dat

$$u(x) = \int_0^1 x - \xi \quad h(\xi) d\xi$$

een oplossing is van

$$u'' = 2h(x).$$

§ 5. Convolutie

Het product van twee distributies wordt niet gedefinieerd. Bij een poging om aan uitdrukkingen als $\delta^2(x)$ betekenis te hechten stuit men op ernstige en onoverkomelijke moeilijkheden. We hebben gezien dat een distributie wel vermenigvuldigd kan worden met een oneindig vaak differentieerbare functie.

Voor twee gewone functies $f(x)$ en $g(x)$ kennen we naast het gewone product ook het begrip van de convolutie nml.

$$(5.1) \quad f(x) * g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi.$$

Het is mogelijk dit begrip op distributies over te dragen. Zijn $f(x)$ en $g(x)$ absoluut integreerbaar dan kan men bewijzen, dat ook $h(x) = f(x) * g(x)$ absoluut integreerbaar is. De door $h(x)$ bepaalde reguliere functionaal kunnen we a.v. herleiden

$$\begin{aligned} (h, \varphi) &= \int \left\{ \int f(\xi) g(x-\xi) d\xi \right\} \varphi(x) dx = \\ &= \int \int f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi+\eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

zodat bijvoorbeeld

$$(5.2) \quad (h, \varphi) = \int g(\eta) \left\{ \int f(\xi) \varphi(\xi+\eta) d\xi \right\} d\eta.$$

Schrijven we

$$\psi(\eta) = \int f(\xi) \varphi(\xi+\eta) d\xi$$

dan kan (5.2) gebracht worden in de volgende vorm

$$(5.3) \quad (h, \varphi) = (g, \psi).$$

Onder zeer ruime voorwaarden is met φ ook ψ een testfunctie zodat in dat geval de betrekking (5.3) opgevat kan worden als een consistente definitie van de convolutie $h=f*g$ voor het geval dat f en g willekeurige, dus niet noodzakelijk reguliere, distributies zijn. Omdat $\varphi(x)$ oneindig vaak differentieerbaar is, is $\psi(\eta)$ dit ook, maar uit de finietheid van φ volgt in het algemeen niet dat finiet is. Het een en ander lukt alleen als aan een der volgende twee voorwaarden voldaan is.

a. De drager van f of van g is begrensd.

b. Beide dragers zijn naar links of naar rechts begrensd.

Alleen in deze gevallen leeft het zin het begrip convolutie te gebruiken.

Als voorbeeld kiezen we $f(x) = \delta(x)$. Dan is volgens (5.2)

$$(5.4) \quad \delta * f = f.$$

Voor de convolutie kan men zonder moeite de commutatieve en associatieve eigenschap bewijzen, nml.

$$(5.5) \quad f * g = g * f,$$

en

$$(5.6) \quad f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Is D een lineaire differentiaaloperator met constante coëfficiënten, dan bewijst men via (5.2) gemakkelijk dat

$$(5.7) \quad D(f * g) = Df * g = f * Dg.$$

Bij toepassingen kunnen we vaak gebruik maken van de volgende stelling welke de continuïteit van de convolutie uitdrukt.

Stelling

$$(5.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ f_n(x) * g(x) \} = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) * g(x) \},$$

mits een der volgende voorwaarden vervuld is

a alle distributies f_n liggen binnen eenzelfde begrensde drager

b g heeft een begrensde drager

c f_n en g zijn uniform eenzijdig begrensd.

Het bewijs volgt gemakkelijk uit (5.2).

§ 6. Distributies in meer dimensies

Men kan de beschouwde begrippen gemakkelijk tot ruimtes van meer dimensies overdragen.

We formuleren in $R_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ met de meetkundige interpretatie van punten of vectoren in een ruimte R_n met Cartesische coördinaten $x_1, x_2, \dots, x_n$. Voor het gemak kunnen we in gedachten wel $n=2$ of $n=3$ kiezen.

De testfuncties $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ of kortweg $\varphi(x)$ zijn weer oneindig vaak partieel differentieerbaar en finiet, d.w.z. nul buiten een zekere bol. Distributies worden gedefinieerd als in § 1. Locaal integreerbare functies $f(x)$ leveren weer met behulp van

$$(6.1) \quad (f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

waarbij we x als een vector moeten interpreteren en waarbij $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, een reguliere distributie. Het standaard-voorbeeld van een singuliere distributie is de n -dimensionale delta-functie $\delta(x)$ of voluit $\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ waarvoor dus per definitie geldt

$$(6.2) \quad (\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

De optelling van twee distributies of de vermenigvuldiging van een distributie met een oneindig vaak differentieerbare functie gaat als in § 2 voor $n=1$. Bij de affine transformaties moeten we even opletten. Is u een affine transformatie en u^{-1} de inverse dan wil toepassing van u op functies $f(x)$ van n -variabelen zeggen dat

$$(6.3) \quad u f(x) = f(u^{-1}x).$$

Is $f(x)$ lokaal integreerbaar dan geeft (6.3) voor de functionaal (6.1)

$$\begin{aligned} (uf(x), \varphi(x)) &= (f(u^{-1}x), \varphi(x)) = |u| \int f(y) \varphi(uy) dy = \\ &= |u| (f(x), \varphi(ux)), \end{aligned}$$

omdat met $\varphi(x)$ ook $\varphi(ux)$ een testfunctie is. Met $|u|$ is natuurlijk de determinant van de transformatie bedoeld.

Handhaving van (6.3) ook voor distributies betekent dus dat we de volgende consistente definitie moeten geven

$$(6.4) \quad (f(u^{-1}x), \varphi(x)) = |u| (f(x), \varphi(ux)).$$

Voor draaiingen geldt dan bovendien de vereenvoudiging $|u| = 1$.

Voorbeelden

1. translatie over een vector h (zie 2.9),

$$ux = x+h,$$

$$(6.5) \quad (f(x-h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+h)).$$

2. spiegeling t.o.v. de oorsprong (zie 2.10),

$$ux = -x,$$

$$(6.6) \quad (f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)).$$

3. gelijkvormigheidstransformatie

$$ux = \alpha x, \text{ waarbij } \alpha > 0,$$

$$(6.7) \quad (f(\alpha^{-1}x), \varphi(x)) = \alpha^n (f(x), \varphi(\alpha x)).$$

De distributie $f(x)$ heet homogeen van de graad m als

$$(6.8) \quad f(\alpha x) = \alpha^m f(x), \quad \alpha > 0.$$

Als voorbeeld is $\mathcal{J}(x)$ in R_n homogeen van de graad $-n$.

De differentiatie van meerdimensionale distributies berust op

$$(6.9) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right),$$

een voor de hand liggende uitbreiding van (3.1).

Uit deze definitie volgt dat bij herhaalde differentiatie de volgorde niet van belang is.

De gevolgen van het invoeren van nieuwe coördinaten illustreren we aan de hand van de delta-functie in R_3 $\mathcal{J}(x_1-a_1)\mathcal{J}(x_2-a_2)\mathcal{J}(x_3-a_3)$. Voor een reguliere distributie geldt voor de substitutie

$$x_j = x_j(y_1, y_2, y_3) \quad (j=1,2,3)$$

$$(6.10) \quad (f, \varphi) = \int f(y) \varphi(y) |J| dy,$$

waarbij J de transformatiedeterminant is (Jacobiaan)

$$(6.11) \quad J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)}.$$

Voor de delta-functie waarbij (a_1, a_2, a_3) overgaat in (b_1, b_2, b_3) geldt dus

$$(6.12) \quad \mathcal{J}(x_1-a_1)\mathcal{J}(x_2-a_2)\mathcal{J}(x_3-a_3) = \frac{1}{|J|} \mathcal{J}(y_1-b_1) \mathcal{J}(y_2-b_2) \mathcal{J}(y_3-b_3).$$

In bolcoördinaten $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ waarbij dus

$x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$,
is $|J| = r^2 \sin \theta$, zodat in het algemeen

$$(6.13) \quad \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) = \\ = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) \delta(\varphi-\varphi_0).$$

Is in het bijzonder $x_0=y_0=0$, dan rekent men gemakkelijk na dat

$$(6.14) \quad \delta(x) \delta(y) \delta(z-z_0) = \frac{1}{2\pi r^2 \sin \theta} \delta(r-r_0) \delta(\theta).$$

Voor de oorsprong tenslotte is

$$(6.15) \quad \delta(x) \delta(y) \delta(z) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r).$$

In cilinder-coördinaten (r, θ, z) , waarbij dus

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

geldt in het algemeen

$$(6.16) \quad \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) = \frac{1}{r} \delta(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) \delta(z-z_0)$$

en voor $x_0=y_0=0$

$$(6.17) \quad \delta(x) \delta(y) \delta(z-z_0) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-z_0).$$

Als toepassing bewijzen we het volgende resultaat voor R_3

$$(6.18) \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3),$$

waarbij

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{en} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

We merken op dat r^{-1} een lokaal integreerbare functie is en dus opgevat kan worden als een (reguliere) distributie. Aangezien elke distributie gedifferentieerd kan worden is de betrekking (6.18) zinvol.

Volgens (6.9) bewijzen we a.v.

$$(\Delta \frac{1}{r}, \varphi) = (\frac{1}{r}, \Delta \varphi) = \iiint \frac{\Delta \varphi}{r} dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{r > \varepsilon} \frac{\Delta \varphi}{r} dv.$$

Volgens de stelling van Green geldt

$$\iiint_{r > \varepsilon} \frac{\Delta \varphi}{r} dv = \iiint_{r > \varepsilon} \varphi \Delta \frac{1}{r} dv - \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r} ds + \iint_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} ds.$$

Omdat r^{-1} buiten de bol $r = \varepsilon$ harmonisch is verdwijnt de eerste term in het rechterlid. Voorts geldt

$$\iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r} ds = \frac{1}{\varepsilon} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds \rightarrow 0,$$

en

$$\iint_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} ds = -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{r=\varepsilon} \varphi ds = -4\pi S_\varepsilon(\varphi),$$

waarbij $S_\varepsilon(\varphi)$ het gemiddelde van $\varphi(x)$ op de bol $r = \varepsilon$ is. Voor $\varepsilon \rightarrow 0$ is inderdaad $S_\varepsilon(\varphi) \rightarrow \varphi(0)$, zodat

$$(\Delta \frac{1}{r}, \varphi) = -4\pi \varphi(0),$$

hetgeen equivalent is met (6.10).

Als voorbeeld van regularisering beschouwen we de functie r^λ in R_3 , dus waarbij $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Voor $\text{Re } \lambda > -3$ is het een lokaal integreerbare functie waarvoor

$$(6.19) \quad (r^\lambda, \varphi) = \int r^\lambda \varphi(x) dx.$$

Voeren we hierin bolcoördinaten in, waarbij $d\Omega$ het oppervlakte-element van de eenheidsbol is, dan is

$$(r^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty r^{\lambda+2} \left\{ \int_\Omega \varphi(x) d\Omega \right\} dr.$$

Is $S_\varphi(r)$ het gemiddelde van $\varphi(x)$ op de bol met straal r , dan kunnen we schrijven

$$(6.20) \quad (r^\lambda, \varphi) = 4\pi \int_0^\infty r^{\lambda+2} S_\varphi(r) dr,$$

met dus

$$(6.21) \quad 4\pi S_\varphi(r) = \int_\Omega \varphi(x) d\Omega.$$

We zien gemakkelijk, dat $S_\varphi(r)$ finiet en oneindig vaak differentieerbaar is. Bovendien zijn alle oneven afgeleiden nul. Derhalve is $S_\varphi(r)$ te beschouwen als een even testfunctie. De interpretatie van de functionaal (6.20) kan dus voor $\text{Re } \lambda \leq -3$ tot die van het in § 4 beschouwde eendimensionale analogon teruggebracht worden (zie (4.5), (4.6) en (4.7)). Het blijkt, dat (6.20) polen heeft in de punten $\lambda = -3 - 2k$ ($k=0,1,\dots$). In het bijzonder is het residu bij $\lambda = -3$ gelijk aan $4\pi \delta(x)$.

Door toevoeging van een geschikte factor kunnen we uit r^λ een reguliere distributie afleiden.

Voeren we als standaardvorm in

$$(6.22) \quad \frac{r^\lambda}{2\pi(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2})!}$$

dan is dus de waarde bij $\lambda = -3$ precies $\delta(x_1, x_2, x_3)$.

Op de volgende wijze is het mogelijk deze functie in vlakke golven te ontwikkelen, een principe dat in verschillende toegepast wiskunde problemen nuttige diensten bewijst. We gaan uit van

$$(6.23) \quad \int_{\Omega} |\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3|^\lambda d\Omega,$$

waarbij $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ een punt van de eenheidsbol is en waarbij geïntegreerd wordt over het oppervlak van de eenheidsbol. We nemen voorlopig $\text{Re } \lambda > -1$. In verband met de aanwezige symmetrie is (6.23) van de vorm

$$f(\lambda) r^\lambda.$$

De nog onbekende functie $f(\lambda)$ volgt uit de speciale keus $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$. Met $\omega_1 = \cos \varphi \sin \theta$, $\omega_2 = \sin \varphi \sin \theta$, $\omega_3 = \cos \theta$ is dan

$$f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin \theta \cos^\lambda \theta d\theta = \frac{4\pi}{\lambda+1}.$$

Aldus geldt het belangrijke resultaat, dat op grond van het principe van analytische voortzetting voor alle λ geldig is

$$(6.24) \quad \frac{1}{\pi(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})!} \int_{\Omega} |\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3|^\lambda d\Omega = \frac{2r^\lambda}{(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2})!}$$

Kiezen we hierin $\lambda = -3$ dan wordt het rechterlid $4\pi \delta(x_1, x_2, x_3)$ terwijl de waarde van het linkerlid uit (4.19) volgt. We vinden dan

$$(6.25) \quad \delta(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Omega} \delta''(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) d\Omega.$$

Uit twee distributies $f(x)$ en $g(y)$, waarbij x en y vectoren zijn kunnen we door het zogenaamde directe of Cartesische product te vormen een distributie van een hogere dimensie afleiden. We schrijven hiervoor $f(x) \times g(y)$ met eventueel weglating van het vermenigvuldigingssymbool. De functionaaldefinitie is dan

$$(6.26) \quad (f(x)g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))).$$

Inderdaad ziet men gemakkelijk in dat $(g(y), \varphi(x, y))$ weer een testfunctie in de X -ruimte is, en dat het linkerlid een continue functionaal is. Meestal ontmoeten we het directe product bij de beschrij-

ving van een meerdimensionale delta-functie nml.

$$(6.27) \quad \begin{cases} \delta(x_1, x_2) = \delta(x_1) \delta(x_2), \\ \delta(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \end{cases}$$

Uit (6.26) kan men gemakkelijk afleiden dat het directe product commutatief en associatief is.

Uit twee meerdimensionale distributies kan men als in § 5 weer een convolutie afleiden. We definiëren algemeen $f * g$ als

$$(6.28) \quad (f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x+y))$$

hetgeen voor distributies van één dimensie identiek is met (5.2). Voor de meerdimensionale convolutie gelden uiteraard dezelfde beperkingen als in het eendimensionale geval.

Als voorbeeld beschouwen we de Newton-potentiaal voor een massaverdeling $\mu(x_1, x_2, x_3)$

$$(6.29) \quad u(x_1, x_2, x_3) = - \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}.$$

We kunnen dit dus schrijven als

$$(6.30) \quad u = \mu * \left(- \frac{1}{4\pi r} \right).$$

§ 7. Fourier reeksen

Bij Fourier reeksen leidt het gebruik van distributies tot aanmerkelijke vereenvoudigingen al zijn er ook wel enkele complicaties. Is $f(x)$ een gewone functie die periodiek is met de periode 2π dan kan men onder zekere ruime voorwaarden $f(x)$ a.v. in een Fourierreeks ontwikkelen

$$(7.1) \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

waarbij

$$(7.2) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Is bijvoorbeeld $f(x)$ lokaal integreerbaar en zijn de coëfficiënten c_n door (7.2) gedefinieerd, dan geldt (7.1) bijna overal. Is, minder ruim, $f(x)$ continu en van begrensde variatie dan geldt (7.1) zonder uitzondering voor alle x .

Voor de convergentie van (7.1) is uiteraard nodig dat $c_n \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \pm\infty$. Voor distributies is dit niet meer vereist. Men heeft namelijk

Stelling. Als voor de coëfficiënten van $\sum c_n e^{inx}$ geldt dat

$$(7.3) \quad c_n = O(|n|^m) \quad n \rightarrow \pm\infty$$

voor een zekere m , dan definieert het rechterlid van (7.1) een periodieke distributie.

Het bewijs van deze belangrijke stelling is bijna triviaal. De reeks

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{(in)^{m+2}} e^{inx},$$

waarbij $n=0$ niet meedoet, convergeert royaal tot een continue functie $F(x)$, waarvoor overigens de coëfficiënten-formule geldt. Vat men $F(x)$ als (reguliere) distributie op dan kan men onbeperkt differentiëren. Doet men dit precies $m+2$ keer, dan leidt dit tot de in de stelling uitgesproken bewering.

Als voorbeeld heeft men (zie 3.14 en 3.15)

$$(7.4) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi m),$$

en

$$(7.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2}x.$$

Men kan van (7.4) een aardige toepassing maken. Is $\varphi(x)$ een testfunctie dan betekent (7.4) dat

$$(7.6) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{inx}, \varphi(x)) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi m).$$

Schrijven we

$$(7.7) \quad \psi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx} \varphi(x) dx$$

dan is derhalve

$$(7.8) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \psi(n) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi m).$$

Dit is de bekende sommatieformule van Poisson welke hier voor testfuncties φ bewezen is. Door limietovergang kan deze sommatieformule voor een ruimere functieklassie geldig gemaakt worden.

Voorbeeld

Is $\varphi(x) = e^{-\alpha^2 x^2}$ dan is $\psi(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{n^2}{4\alpha^2}}$

zodat

$$(7.9) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 / \alpha^2}.$$

Naast het voordeel doordat we in zekere zin af zijn van de convergentie van (7.1) is er een klein nadeel omdat voor distributies de coëfficiënten-formule (7.2) zijn zin verliest. Met iets als $\int_0^{2\pi} \delta'(x) dx$ kunnen we nu eenmaal niets beginnen. Hierop bestaat het volgende trucje. Laat $U(x)$ een testfunctie zijn welke voorlopig vaag gedefinieerd als $U(x)=1$ in een zeker interval ter breedte 2π en $U(x)=0$ er buiten. Precieser geformuleerd: zij $U(x)$ zodanig dat

$$\begin{cases} U(x) = 1 & \text{voor } \delta < x < 2\pi - \delta \\ U(x) = 0 & \text{voor } x < -\delta \text{ en } x > 2\pi + \delta, \\ 0 < U(x) < 1 & \text{elders.} \end{cases}$$

Het zal overigens straks blijken, dat de enige essentiële voorwaarde is dat

$$(7.10) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} U(x+2\pi n) = 1,$$

waarbij niet meer dan twee termen meedoen.

We definieren nu

$$(7.11) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx} U(x) dx.$$

Inderdaad is dit voor een gewone lokaal integreerbare functie met de periode 2π aequivalent met (7.2). De uitdrukking behoudt zijn zin

Kan men de distributie $f(x)$ opvatten als een m^e -afgeleide van een gewone continue functie met de periode 2π dan geldt voor deze functie de Fourier-reeks met de coëfficiëntenformule (7.2) d.w.z. (7.12). Differentieert men alles m -maal dan geldt derhalve ook voor de distributie $f(x)$ de ontwikkeling (7.1) met de coëfficiëntenformule (7.12).

Met behulp van dieperliggende topologische hulpmiddelen kan men bewijzen dat elke distributie opgevat kan worden als de zoveelste afgeleide van een continue functie. Aldus geldt (7.1) en (7.12) voor elke periodieke distributie.

§ 8. Differentiaalvergelijkingen I

De eenvoudigste differentiaalvergelijking

$$(8.1) \quad \frac{df}{dx} = 0,$$

waarbij f een distributie is, heeft zoals we zullen aantonen, slechts de oplossing $f = \text{constant}$ evenals dat voor gewone functies het geval is. Op grond van de definitie van afgeleide is (8.1) equivalent met

$$(8.2) \quad (f, \frac{d\varphi}{dx}) = 0$$

voor elke testfunctie $\varphi(x)$. Hieruit moeten we zien af te leiden dat

$$(8.3) \quad (f, \varphi) = C \int \varphi(x) dx, \quad C \text{ een constante,}$$

voor elke $\varphi \in T$.

Nu kunnen we de testfuncties verdelen in twee klassen, een klasse T_1 van testfuncties die de afgeleide van een testfunctie zijn en een klasse T_2 voor wie dit niet zo is. Is $\varphi_1 = \varphi'$ dan is klaarblijkelijk

$$(8.4) \quad \int \varphi_1 dx = 0.$$

Geldt omgekeerd de voorwaarde (8.4) dan is $\int^x \varphi_1 d\xi$ een testfunctie waarvan φ_1 de afgeleide is. We kiezen uit T_2 een vaste testfunctie φ_2 waarvoor

$$(8.5) \quad \int \varphi_2 dx = 1.$$

Dan kunnen we elke testfunctie $\varphi(x)$ (ondubbeltzinnig) schrijven in de vorm

$$(8.6) \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \int \varphi(x) dx.$$

Uit (8.2) volgt al $(f, \varphi_1) = 0$, is vervolgens $(f, \varphi_2) = C$ dan volgt uit (8.6) voor elke testfunctie

$$(f, \varphi) = C \int \varphi(x) dx,$$

hetgeen te bewijzen was.

Opgave. Bewijs op een analoge wijze dat uit $x f(x) = 0$ volgt dat $f(x) = C \delta(x)$, waarbij C een willekeurige constante is.

Gaan we een stapje verder door

$$(8.7) \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

te beschouwen, dan is de oplossing hiervan de distributie

$$(8.8) \quad f = ax + b,$$

waarbij a en b constanten zijn.

De vergelijking

$$(8.9) \quad \frac{df}{dx} = \delta(x)$$

heeft, zoals men onmiddellijk kan verifiëren, de particuliere oplossing

$$(8.10) \quad f = \theta(x).$$

Hierbij kan men uiteraard een willekeurige oplossing van de homogene vergelijking bij optellen waarmee alle oplossingen dan bepaald zijn. De algemene oplossing van (8.9) is dus

$$(8.11) \quad f = C + \theta(x).$$

Voor $C=-1$ heeft men bijvoorbeeld

$$(8.12) \quad f = -\theta(-x).$$

Hierbij stelt (8.10) een oplossing met een naar links begrensde drager en (8.12) een met een naar rechts begrensde drager voor.

De oplossing van

$$(8.13) \quad \frac{df}{dx} = h(x),$$

waarbij $h(x)$ een gegeven distributie is, kan gemakkelijk uit die van (8.9) afgeleid worden. Is nml. (8.10) een particuliere oplossing van (8.9) dan is de convolutie

$$(8.14) \quad f = \theta(x) * h(x)$$

er een van (8.13) zoals differentiatie onmiddellijk laat zien.

We hadden ook (8.12) kunnen gebruiken. Het lukt dus een zogenaamde primitieve van $f(x)$ te vinden op voorwaarde echter dat de drager van $f(x)$ eenzijdig begrensd is.

Analoog heeft

$$(8.15) \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \delta(x)$$

de particuliere oplossing

$$(8.16) \quad f = x \theta(x),$$

en leidt men hieruit voor

$$(8.17) \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = h(x),$$

de volgende particuliere oplossing af

$$(8.18) \quad f = x \, \theta(x) * h(x).$$

Algemener beschouwen we

$$(8.19) \quad P(D)f = h(x),$$

waarbij $P(D)$ een polynoom in $D=d/dx$ is met constante coëfficiënten. Nemen we aan dat $g(x)$ een particuliere oplossing is voor het speciale geval $h(x)=\delta(x)$, dan is een particuliere oplossing van (8.19) bepaald door

$$(8.20) \quad f = g * h.$$

§ 9. Differentiaalvergelijkingen II (type Sturm-Liouville)

We beginnen met het volgende eenvoudige randwaarden-probleem. In het interval $(0,1)$ een functie $f(x)$ te vinden welke voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(9.1) \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) + h(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

waarbij $h(x)$ een gegeven functie is, en welke voldoet aan de randvoorwaarden

$$(9.2) \quad f(0) = 0 \text{ en } f(1) = 0.$$

Dit probleem is een speciaal geval van een veel algemener probleem dat naar Sturm en Liouville genoemd is. Het gebruikelijke formalisme om (9.1) met (9.2) op te lossen is als volgt. Eerst beschouwt men het overeenkomstige probleem van Green nml. een functie $g(x, \xi)$ (functie van Green) te vinden welke voldoet aan

$$(9.3) \quad \frac{d^2}{dx^2} g(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0,$$

en aan

$$(9.4) \quad g(0, \xi) = g(1, \xi) = 0.$$

Gemakkelijk vindt men

$$g(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 < x < \xi, \\ \xi(1-x), & \xi < x < 1. \end{cases}$$

Eventueel kan men in distributionele notatie schrijven

$$(9.6) \quad g(x, \xi) = x(1-\xi)\theta(\xi-x) + \xi(1-x)\theta(x-\xi).$$

De oplossing van (9.1) met (9.2) is dan zoals bekend

$$(9.7) \quad f(x) = \int_0^1 g(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

We zullen het beschouwde probleem nu van het standpunt van de distributietheorie beschouwen. In (9.1) beschouwen we dan $f(x)$ en $h(x)$ als distributies. De grote moeilijkheid is echter hoe we de randvoorwaarden (9.2) moeten interpreteren aangezien aan een distributie i.h.a. geen waarden in een punt kunnen worden toegekend. Deze moeilijkheid kan op de volgende wijze opgelost worden.

Als testfuncties $\varphi(x)$ komen in aanmerking alle in $(0,1)$ oneindig differentieerbare functies. We vormen allereerst de algemene klasse T_0 van testfuncties die met hun afgeleiden aan de uiteinden $x=0$ en $x=1$ nul zijn. Met behulp van deze klasse kunnen we de "inwendige" eigenschappen van de distributies, d.w.z. die in het open interval

(0,1) formuleren. Vervolgens vormen we de speciale klasse T_1 van testfuncties waarvoor $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. Deze klasse zorgt voor de randvoorwaarden.

Voor gewone functies $f(x)$ kunnen we t.o.v. T_0+T_1 de continue lineaire functionaal

$$(9.8) \quad (f, \varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx$$

maken. Dit noemen we weer een reguliere distributie. Een continue lineaire functionaal die niet van dit type is heet weer een singuliere distributie. Het standaardvoorbeeld is

$$(9.9) \quad (\delta(x-a), \varphi(x)) = \varphi(a).$$

Veronderstellen we van $\varphi(x)$ alleen onbeperkte differentieerbaarheid dan is voor functies

$$(9.10) \quad \left(\frac{d^2 f}{dx^2}, \varphi\right) = \left(f, \frac{d^2 \varphi}{dx^2}\right) + (f' \varphi - f \varphi') \Big|_0^1.$$

Als $\varphi \in T_0$ valt de tweede term in het rechterlid weg, zodat

$$(9.11) \quad (f'', \varphi) = (f, \varphi'').$$

De randvoorwaarden (9.2) en de overeenkomstige randvoorwaarden voor de functies $\varphi(x) \in T_1$ maken dat (9.11) eveneens geldig is voor de klasse T_1 .

We kunnen derhalve (9.11) opvatten als een impliciete formulering voor de randvoorwaarden (9.2). We komen aldus tot de volgende regel dat voor distributies de randvoorwaarden (9.2) vervangen moeten worden door de eis dat (9.11) geldig is voor de speciale klasse testfuncties T_1 welke aan de randvoorwaarden van het probleem aangepast is.

Het klassieke resultaat (9.7) definieert weer een distributie, immers

$$(9.12) \quad (f, \varphi) = \int_0^1 h(\xi) d\xi \int_0^1 g(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = (h, \psi),$$

waarbij

$$(9.13) \quad \psi = \int_0^1 g(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

een testfunctie is.

Algemener beschouwen we het Sturm-Liouville probleem

$$(9.14) \quad L f = h(x),$$

met

$$(9.15) \quad L = - \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x),$$

waarbij $p(x)$ en $q(x)$ oneindig vaak differentieerbare functies zijn.
Als randvoorwaarden kiezen we

$$(9.16) \quad \begin{cases} f \cos \alpha + f' \sin \alpha = 0 & \text{voor } x=0, \\ f \cos \beta + f' \sin \beta = 0 & \text{voor } x=1. \end{cases}$$

Is (x) oneindig vaak differentieerbaar dan geldt voor functies de identiteit

$$(9.17) \quad \varphi L f - f L \varphi = \frac{d}{dx} \left\{ p \left(f \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{df}{dx} \right) \right\}.$$

Voorts geldt de identiteit

$$(9.18) \quad f \varphi' - \varphi f' = (\varphi \cos \gamma + \varphi' \sin \gamma)(f \sin \gamma - f' \cos \gamma) - (f \cos \gamma + f' \sin \gamma)(\varphi \sin \gamma - \varphi' \cos \gamma).$$

Voeren we naast de klasse T_0 van standaard-testfuncties de speciale klasse T_1 van testfuncties $\varphi(x)$ in, waarvoor de randvoorwaarden (9.16) d.w.z.

$$(9.19) \quad \begin{cases} \varphi \cos \alpha + \varphi' \sin \alpha = 0 & \text{voor } x=0, \\ \varphi \cos \beta + \varphi' \sin \beta = 0 & \text{voor } x=1, \end{cases}$$

vervuld zijn, dan is op grond van (9.17) en (9.18) met een overeenkomstige redenering als in het speciale geval het probleem in distributietaal equivalent met (9.14) en de aanvullende eis dat

$$(9.20) \quad (Lf, \varphi) = (f, L\varphi)$$

geldig is voor de speciale testfuncties van T_1 .

§ 10. Differentiaalvergelijkingen III

We beschouwen het warmtegeleidingsprobleem

$$(10.1) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty$$

waarbij op het begintijdstip de temperatuurverdeling als distributie gegeven is.

$$(10.2) \quad T = \mu(x) \quad \text{voor } t=0.$$

In het speciale geval $\mu(x) = \delta(x)$ (momentane warmtebron op $t=0$ in de oorsprong) is de oplossing bekend, nml.

$$(10.3) \quad T = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{x^2}{4t},$$

(zie b.v. § 4 opgave 7).

In het algemene geval (10.2) is de oplossing

$$(10.4) \quad T = \mu(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{x^2}{4t}.$$

We zullen dit even verifiëren. Noemen we het rechterlid van (10.3) $g(x,t)$ dan is op grond van de continuïteit van de convolutie

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(x) * g(x,t) = \mu(x) * \frac{\partial}{\partial t} g(x,t).$$

Uit (5.7) volgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mu(x) * g(x,t) = \mu(x) * \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t).$$

Inderdaad is aan (10.1) voldaan. Weer op grond van de continuïteit van de convolutie is

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \mu(x) * g(x,t) &= \mu(x) * \lim_{t \rightarrow +0} g(x,t) = \\ &= \mu(x) * \delta(x) = \mu(x), \end{aligned}$$

zodat ook (10.2) geldt.

Vervolgens beschouwen we de golfvergelijking in één dimensie

$$(10.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

We nemen aan dat op $t=0$ de beginsituatie bekend is (probleem van Cauchy)

$$(10.6) \quad u = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{voor } t=0,$$

waarbij u_0 en u_1 gegeven distributies zijn.

De oplossing van het eenvoudiger probleem met de begintoestand

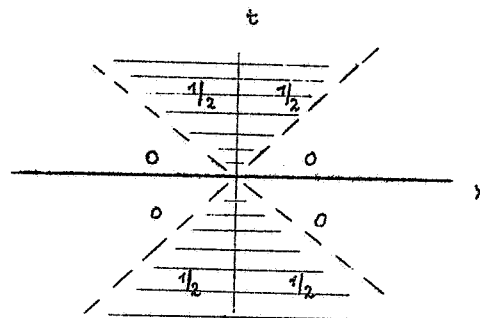
$$(10.7) \quad u=0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \delta(x)$$

noemen we de basisoplossing van het probleem. Zodra deze bekend is kan de oplossing van het probleem met een willekeurige begintoestand (10.6) gemakkelijk gevonden worden. Deze basisoplossing is eenvoudig

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{voor } |x| < t \\ 0 & \text{voor } |x| > t, \end{cases}$$

of

$$(10.8) \quad E(x,t) = \frac{1}{2} \{ \theta(x+t) - \theta(x-t) \}$$



Uit o.a.

$$E_t(x,t) = \frac{1}{2} \{ \delta(x+t) + \delta(x-t) \}$$

en

$$E_{tt}(x,t) = \frac{1}{2} \{ \delta'(x+t) - \delta'(x-t) \}$$

volgt inderdaad dat aan (10.5) voldaan is en dat voor $t \rightarrow 0$ $E=0$ en $\frac{\partial E}{\partial t} = \delta(x)$.

We merken op dat ook $E_t(x,t)$ een oplossing van (10.5) is en dat voor $t \rightarrow 0$ $E_t = \delta(x)$ en $\frac{\partial}{\partial t} E_t = 0$.

Dan is zoals men gemakkelijk kan verifiëren de oplossing van (10.5) en (10.6)

$$u = E * u_1 + E_t * u_0,$$

of

$$(10.9) \quad u = \frac{1}{2} \{ u_0(x+t) + u_0(x-t) \} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi) d\xi.$$

Tenslotte beschouwen we als toepassing van de distributietheorie een generalisatie van de vergelijking van Poisson in drie dimensies

$$(10.10) \quad L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u = \delta(x_1, x_2, x_3)$$

waarbij L een homogene lineaire elliptische differentiaaloperator van de orde $2m$ is met constante coëfficiënten. Voorbeelden van L zijn

$$L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (m=1)$$

$$L = \sum \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \sum \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \quad (m=2).$$

Gebruikmakend van (6.22) vervangen we (10.10) door de algemenere differentiaalvergelijking

$$(10.11) \quad L u = \frac{r^\lambda}{2\pi (\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2})!}.$$

Volgens (6.24) kunnen we dit vervangen door

$$(10.12) \quad L u = \frac{1}{4\pi^2 (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})!} \int_{\Omega} |\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3|^\lambda d\Omega.$$

De overeenkomstige vergelijking met in het rechterlid één particuliere vlakke golf, te weten

$$(10.13) \quad L u = \frac{|\xi|^\lambda}{4\pi^2 (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})!},$$

waarbij

$$(10.14) \quad \xi = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3$$

kunnen we gemakkelijk oplossen. Stellen we $u=v(\xi)$ dan volgt uit (10.13)

$$(10.15) \quad L(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \frac{d^{2m}}{d\xi^{2m}} v(\xi) = \frac{|\xi|^\lambda}{4\pi^2 (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})!},$$

zodat

$$(10.16) \quad v(\xi) = \frac{1}{4\pi^2 (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})! L(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} \left\{ \frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1) \dots (\lambda+2m)} + P(\xi) \right\},$$

waarbij $P(\xi)$ een polynoom van hoogstens de graad $2m-1$ is.

De algemene oplossing van (10.12) of (10.11) is dan

$$(10.17) \quad u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2 (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})!} \int_{\Omega} \left\{ \frac{|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1) \dots (\lambda+2m)} + P \right\} \frac{d\Omega}{L(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}.$$

Voor $2m > 3$ en $\lambda \rightarrow -3$ leidt dit tot de volgende particuliere oplossing van (10.10)

$$(10.18) \quad u(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{16\pi^2 (2m-3)!} \int_{\Omega} \frac{|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3|^{2m-3}}{L(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} d\Omega.$$

Is $2m < 3$ d.w.z. $m=1$ dan is met behulp van (4.19) nml.

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} \frac{|x|^\lambda}{(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})!} = \delta(x)$$

de oplossing

$$(10.19) \quad u(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Omega} \frac{\partial(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)}{L(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} d\Omega .$$

§ 11. Fourier transformatie

Is $f(x)$ een gewone functie dan bestaat onder ruime voorwaarden de Fourier-getransformeerde $g(u)$ van $f(x)$ welke gedefinieerd is als

$$(11.1) \quad g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx.$$

Men kan bijv. eisen dat $f(x)$ in $(-\infty, \infty)$ absoluut integreerbaar is. Omgekeerd kan men $f(x)$ uit $g(u)$ terugvinden met behulp van de zgn. omkeerformule

$$(11.2) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} g(u) du.$$

In de klassieke theorie van de Fourier-transformatie kent men de betrekking

$$(11.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_1(u)} g_2(u) du,$$

welke naar Parseval genoemd wordt.

Als voorbeeld van Fourier getransformeerden heeft men

$$\frac{1}{1+x^2} \doteq \pi \exp - |u|$$

$$\frac{1}{x-i\varepsilon} \doteq 2\pi i e^{-\varepsilon u} \theta(u) \quad (\varepsilon > 0)$$

$$\exp \{ -a|x| + ibx \} \doteq \frac{2a}{a^2 + (u+b)^2} e^{-au} \quad (a > 0).$$

In (11.1) kunnen we u als een complexe variabele opvatten. We schrijven dan liever $w (= u+iv)$ in plaats van u . Dan definieert

$$(11.4) \quad g(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} f(x) dx$$

een analytische functie in het complexe w -vlak.

Is $\varphi(x)$ een testfunctie uit de klasse T en is $\varphi(x)=0$ voor $|x| > a > 0$ dan is de Fourier getransformeerde

$$(11.5) \quad \psi(w) = \int_{-a}^a e^{iwx} \varphi(x) dx$$

zelfs een gehele analytische functie. Blijkbaar geldt

$$(11.6) \quad |\psi(w)| < C e^{a|v|}.$$

We kunnen (11.5) m -maal naar w differentieren zodat algemener

$$(11.7) \quad |w^m \psi(w)| < C_m e^{a|v|}.$$

In het bijzonder volgt hieruit voor $v=0$

$$(11.8) \quad u^m \psi(u) \rightarrow 0 \quad \text{voor } u \rightarrow \pm\infty \text{ en elke } m.$$

De klasse van de F-transforms $\psi(w)$ van de testfuncties van $\varphi(x)$ noemen we T^* . De klasse T^* bezit dus de eigenschap (11.8) maar is anderzijds door (11.8) gekarakteriseerd. Inderdaad volgt uit het feit dat voor een gehele analytische functie aan (11.7) voldaan is dat

$$(11.9) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} \psi(w) dw$$

finiet en onbeperkt differentieerbaar is en m.a.w. tot T behoort.

Distributies t.o.v. T definiëren we iets algemener dan vroeger door de (complexe) continue lineaire functionaal

$$(11.10) \quad (f, \varphi) = \int \overline{f(x)} \varphi(x) dx,$$

waarbij het rechterlid de gewone betekenis heeft voor een reguliere distributie en de symbolische betekenis bezit voor een singuliere distributie.

Analoog kunnen we t.o.v. T^* distributies $g(w)$ definiëren als continue lineaire functionalen t.o.v. testfuncties $\psi(w) \in T^*$. Distributies van het type

$$(11.11) \quad (g, \psi) = \int_L g(w) \psi(w) dw$$

heten analytisch. De delta-functie $\delta(w-w_0)$ is gedefinieerd als

$$(11.12) \quad (\delta(w-w_0), \psi(w)) = \psi(w_0).$$

Blijkbaar is $\delta(w-w_0)$ een analytisch functionaal omdat volgens Cauchy

$$(11.13) \quad \psi(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\psi(w) dw}{w-w_0},$$

als de integratieweg een gesloten kromme is die w_0 omsluit.

We komen nu tot het begrip van Fourier-transformatie van generaliseerde functies. Is vooreerst $f(x)$ een reguliere distributie waarbij dan $f(x)$ in $(-\infty, \infty)$ absoluut integreerbaar is dan is

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \psi(u) du \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \overline{f(x)} dx \right\} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(u)} \psi(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} (g, \psi). \end{aligned}$$

Dit is de bekende gelijkheid (11.3) van Parseval. Deze betrekking

$$(11.14) \quad (g, \psi) = 2\pi (f, \varphi)$$

koppelt dus reguliere functionen $f(x)$ t.o.v. T aan reguliere functionen $g(u)$ t.o.v. T^* .

Voor algemene distributies $f(x)$ vatten we (11.14) op als de definitie van de Fourier-transform van $f(x)$.

Als toepassing van (11.14) kiezen we $f(x) = \delta(x)$. Dan is

$$(g, \psi) = 2\pi (\delta(x), \psi(x)) = 2\pi \psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du = (1, \psi)$$

zodat

$$(11.15) \quad F T \quad \delta(x) = 1.$$

Als tweede toepassing berekenen we de Fourier transform van $f(x)=1$. Dan is

$$(g, \psi) = 2\pi (1, \psi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 2\pi \psi(0) = 2\pi (\delta(w), \psi(w))$$

zodat

$$(11.16) \quad F T \quad 1 = 2\pi \delta(w).$$

Als derde toepassing beschouwen we de Fourier transform van e^{ax} . Weer volgens (11.14) is

$$(g, \psi) = 2\pi (e^{ax}, \psi(x)) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \psi(x) dx = 2\pi \psi(-ia)$$

zodat

$$(11.17) \quad F T \quad e^{ax} = 2\pi \delta(w-ia).$$

De Fourier-transformatie is een lineaire operatie waarbij dus

$$(11.18) \quad F T (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) = \alpha_1 F T f_1(x) + \alpha_2 F T f_2(x).$$

Voorts volgt uit de continuïteit van de functionen dat

$$(11.19) \quad F T \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F T f_n(x).$$

Uit (11.14) leidt men gemakkelijk de volgende differentiatierule af

$$(11.20) \quad F T \quad \frac{df}{dx} = -iw F T f(x),$$

en

$$(11.21) \quad F T (ix f(x)) = \frac{d}{dw} F T f(x),$$

net als bij gewone functies.

Uit (11.21) volgt gemakkelijk

$$(11.22) \quad F T x^n = 2\pi (-i)^n \delta^{(n)}(w),$$

en

$$(11.23) \quad F T \delta^{(n)}(x) = (-iw)^n.$$

Als voorbeeld van (11.19) heeft men bijvoorbeeld

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \\ g_n(x) = \exp - \varepsilon |u| \end{cases} \quad (\varepsilon = 1/n)$$

Inderdaad is voor $n \rightarrow \infty$ $f_n(x) \rightarrow \delta(x)$ en $g_n(x) \rightarrow 1$ in overeenstemming met (11.15).

Het klassieke resultaat dat de Fourier transform van een convolutie gelijk is aan het product van de Fourier transforms g_j van de factoren f_j geldt ook voor distributies met dien verstande dat of g_1 of g_2 onbepaaldifferentieerbaar is

$$(11.24) \quad \text{F T } f_1 * f_2 = g_1(w)g_2(w).$$

Tenslotte bepalen we de Fourier transform van de distributie x_+^λ . Voor $-1 < \lambda < 0$ is

$$\text{F T } \frac{x_+^\lambda}{\lambda!} = \frac{1}{\lambda!} \int_0^\infty e^{iwx} x_+^\lambda d\lambda = \frac{i^{\lambda+1}}{w^{\lambda+1}} \quad (v > 0).$$

Voor $v \rightarrow 0$ is dus wegens analytische voortzetting voor alle λ

$$(11.25) \quad \text{F T } \frac{x_+^\lambda}{\lambda!} = i^{\lambda+1} (u+i0)^{-\lambda-1}.$$

Eventueel kan men hiervoor schrijven

$$(11.26) \quad \text{F T } \frac{x_+^\lambda}{\lambda!} = 1 \left\{ e^{\frac{1}{2}\lambda\pi} u_+^{-\lambda-1} - e^{-\frac{1}{2}\lambda\pi} u_-^{-\lambda-1} \right\}.$$

In het bijzonder is voor $\lambda=0$ en $\lambda=1$

$$(11.27) \quad \text{F T } x_+^0 = \text{F T } \theta(x) = \frac{1}{u} + \pi \delta(u),$$

en

$$(11.28) \quad \text{F T } x_+^1 = \text{F T } x_+ = -\frac{1}{u^2} - i\pi \delta'(u).$$

Tabel van Fourier transforms

$f(x)$	$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx$
$f(ax)$	$\frac{1}{a} g\left(\frac{u}{a}\right)$
$f(x-a)$	$e^{iau} g(u)$
$e^{iax} f(x)$	$g(u+a)$
$\frac{df}{dx}$	$-iug(u)$
$ix f(x)$	$\frac{dg}{du}$

$\delta(x)$	1
$\theta(x)$	$\frac{i}{u} + \pi \delta(u)$
$\operatorname{sgn} x$	$\frac{2i}{u}$
1	$2\pi \delta(u)$
x	$-2\pi i \delta'(u)$
x^{-1}	$\pi i \operatorname{sgn} u$
x^{-2}	$-\pi u $
e^{iax}	$2\pi \delta(u+a)$
$\sin ax$	$-\pi i \{ \delta(u+a) - \delta(u-a) \}$
$\frac{\sin ax}{x}$	$\pi \{ \theta(u+a) - \theta(u-a) \}$
$\frac{ x ^\lambda}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda)}$	$2^{1+\lambda} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{ u ^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\frac{1}{2}\lambda)}$
$\frac{ x ^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}\lambda)}$	$i 2^{1+\lambda} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{ u ^{-\lambda-1} \operatorname{sgn} u}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda)}$
$e^{cx} f(x)$	$g(w-ic)$
e^{cx}	$2\pi \delta(w-ic)$
$\operatorname{ch} cx$	$\pi \{ \delta(w-ic) + \delta(w+ic) \}$
$\operatorname{sh} cx$	$\pi \{ \delta(w-ic) - \delta(w+ic) \}$

§ 12. Toepassingen

a Een oplossing te vinden van de potentiaalvergelijking

$$(12.1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$

welke voldoet aan de randvoorwaarde

$$(12.2) \quad f = h(x) \quad y = 0.$$

Toepassing van Fourier-transformatie volgens

$$(12.3) \quad \tilde{f} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x,y) dx$$

geeft

$$(12.4) \quad \frac{d^2 \tilde{f}}{dy^2} = u^2 \tilde{f},$$

$$(12.5) \quad \tilde{f} = \tilde{h}(u) \quad \text{voor } y=0.$$

Een particuliere oplossing is

$$(12.6) \quad \tilde{f} = -\frac{1}{u} \tilde{h}(u) e^{-|u|y},$$

Door terugtransformatie vinden we dan $f(x,y)$.

Is bijv. $h(x) = \exp(-\varepsilon|x|) \operatorname{sgn} x$ ($\varepsilon > 0$) dan is

$$\begin{aligned} \tilde{h}(u) &= \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon - iu)x} dx - \int_{-\infty}^0 e^{(\varepsilon + iu)x} dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon - iu} - \frac{1}{\varepsilon + iu} = \frac{2iu}{\varepsilon^2 + u^2}, \end{aligned}$$

zodat

$$(12.7) \quad \tilde{f}(u,y) = -\frac{2i}{\varepsilon^2 + u^2} e^{-|u|y}.$$

Volgens de bekende omkeerformule is tenslotte

$$(12.8) \quad f(x,y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu - y|u|} \frac{du}{\varepsilon^2 + u^2},$$

een formule waaraan niet veel meer te herleiden valt.

Is daarentegen bijv. $h(x)=1$ dan faalt het klassieke formalisme omdat in klassieke zin $h(u)$ niet bestaat. In distributionele zin is daarentegen

$$\tilde{h}(u) = 2\pi \delta(u).$$

Een particuliere oplossing van de getransformeerde vergelijking is bijv.

$$\tilde{f}(u,y) = 2\pi \delta(u) \frac{\operatorname{sh} uy}{u}$$

of na herleiding

$$(12.9) \quad \tilde{f}(u, y) = 2\pi y \delta(u).$$

Terugtransformatie geeft

$$(12.10) \quad f(x, y) = y,$$

welke oplossing inderdaad voldoet.

Opgave. Beschouw ook het geval $h(x) = e^{iax}$.

b Een oplossing te vinden van het warmtegeleidingsprobleem

$$(12.11) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1,$$

met

$$(12.12) \quad \begin{cases} T = \theta(x) & \text{voor } y=1, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & \text{voor } y=0. \end{cases}$$

Fourier-transformatie in distributie zin geeft

$$(12.13) \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} = u^2 \tilde{T}$$

met

$$(12.14) \quad \begin{cases} \tilde{T} = \frac{1}{u} + \pi \delta(u) & \text{voor } y=1 \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = 0 & \text{voor } y=0. \end{cases}$$

Dit eenvoudiger probleem heeft de oplossing

$$\tilde{T} = \frac{\text{ch } uy}{\text{ch } u} \left(\frac{1}{u} + \pi \delta(u) \right),$$

of na herleiding

$$(12.15) \quad \tilde{T} = \left\{ \frac{1}{u} + \pi \delta(u) \right\} + \frac{1}{u} \left\{ \frac{\text{ch } uy}{\text{ch } u} - 1 \right\}.$$

Het eerste stuk van het rechterlid is de FT van $\theta(x)$, het tweede stuk kunnen we met de omkeerformule behandelen, dus

$$T(x, y) = \theta(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \left(\frac{\text{ch } uy}{\text{ch } u} - 1 \right) \frac{du}{u},$$

of

$$(12.16) \quad T(x, y) = \theta(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \left(1 - \frac{\text{ch } uy}{\text{ch } u} \right) \frac{du}{u}.$$

c We beschouwen een klassiek probleem uit de (tweedimensionale) diffractietheorie. Vanuit de richting α ($0 < \alpha < \pi$) valt in het boven-halvlak $y > 0$ op de X-as een vlakke golf welke gedeeltelijk gespiegeld gedeeltelijk geabsorbeerd wordt. De vergelijking is

$$(12.17) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad y > 0,$$

met de randvoorwaarde

$$(12.18) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + hf = 0, \quad y=0.$$

De inkomende golf is

$$(12.19) \quad u = \exp \{ i \omega (x \cos \alpha + y \sin \alpha + t) \}.$$

We stellen eerst

$$(12.20) \quad f = e^{i \omega t} a(x, y),$$

en

$$(12.21) \quad a(x, y) = \exp \{ i \omega (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \} + b(x, y),$$

zodat $b(x, y)$ de reflectie voorstelt. De nieuwe variabele b voldoet aan

$$(12.22) \quad \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \omega^2 b = 0,$$

en

$$(12.23) \quad \frac{\partial b}{\partial y} + hb = -(i \omega \sin \alpha + h) e^{i \omega x \cos \alpha}.$$

Fourier transformatie geeft

$$(12.24) \quad \frac{\partial^2 \tilde{b}}{\partial y^2} + (\omega^2 - u^2) \tilde{b} = 0,$$

en

$$(12.25) \quad \frac{\partial \tilde{b}}{\partial y} + h \tilde{b} = -2\pi (i \omega \sin \alpha + h) \delta(u + \omega \cos \alpha).$$

De oplossing hiervan is

$$\tilde{b} = -2\pi \delta(u + \omega \cos \alpha) \frac{h + i \omega \sin \alpha}{h - i \sqrt{\omega^2 - u^2}} e^{-iy \sqrt{\omega^2 - u^2}}$$

of

$$(12.26) \quad \tilde{b} = - \frac{h + i \omega \sin \alpha}{h - i \omega \sin \alpha} e^{-i \omega y \sin \alpha} 2\pi \delta(u + \omega \cos \alpha).$$

Inversie geeft

$$b = - \frac{h + i \omega \sin \alpha}{h - i \omega \sin \alpha} \exp \{ i \omega (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \},$$

zodat tenslotte

$$(12.27) \quad f = e^{i \omega t} \left\{ \exp i \omega (x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \frac{h + i \omega \sin \alpha}{h - i \omega \sin \alpha} \exp i \omega (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \right\}.$$

§ 13. Appendix

In deze appendix geven we een eenvoudig bewijs van de theoretisch zeer belangrijke stelling dat elke distributie de limiet in distributionele zin is van testfuncties.

In de eerste plaats kunnen we $\delta(x)$ benaderen door een rij testfuncties $d_n(x)$ waarbij we alleen moeten zorgen dat $\lim d_n(x) = 0$ voor $x \neq 0$ terwijl steeds $\int d_n(x) dx = 1$. Een voorbeeld van een dusdanige rij is

$$(13.1) \quad d_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{e^{-n \operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}, \quad |x| < \frac{1}{2}\pi$$

waarbij elke testfunctie $d_n(x)$ de drager $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ heeft.

Vervolgens gebruiken we de volgende hulpstelling. Is $f(x)$ een distributie en $t(x)$ een testfunctie dan is

$$(13.2) \quad f(x) * t(x) = (f(y), t(y-x)).$$

Het rechterlid van (13.2) is blijkbaar een oneindig vaak differentieerbare functie. Dan is volgens de definitie van de convolutie voor een willekeurige testfunctie

$$\begin{aligned} (f * t, \varphi) &= (f(x), (t(y), \varphi(y+x))) = \\ &= (f(x), \int t(y) \varphi(y+x) dy) = (f(x), \int t(y-x) \varphi(y) dy). \end{aligned}$$

Wegens de lineariteit en de continuïteit van de functionaal mogen we het integraalteken voor de functionaal brengen nml.

$$(f * t, \varphi) = \int (f(x), t(y-x)) \varphi(y) dy.$$

De relatie (13.2) is hiermee bewezen.

Het bewijs van de hoofdstelling berust op de toepassing van de continuïteit van de convolutie:

$$f(x) = f(x) * \delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) * d_n(x).$$

Volgens de hulpstelling is $f_n(x) = f(x) * d_n(x)$ een oneindig vaak differentieerbare functie d.w.z. afgezien van de finietheid een testfunctie. Maar leiden we uit elke $f_n(x)$ een testfunctie af door te zorgen dat bijv.

$$\begin{cases} t_n(x) = f_n(x) & \text{voor } |x| < n \\ t_n(x) = 0 & \text{voor } |x| > n+1 \end{cases}$$

dan is het duidelijk dat vanaf zeker rangnummer

$$(t_n, \varphi) = (f_n, \varphi)$$

zodat ook

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x) = f(x).$$